

SOLUZIONE COMMENTATA

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

CORSO DI MATEMATICA PER L'ECONOMIA

I MODULO

- 1) Individuare il campo di esistenza della seguente funzione polinomiale:

$$y = x^2 + 5x + 6$$

- ☒ $\mathbb{R}$
☐ $x \neq 3$
☐ $x \neq 6$
☐ $x \neq -3, x \neq -6$

Poiché la funzione data è polinomiale, essa risulta definita su tutto l'asse reale: una qualunque funzione polinomiale, infatti, è definita su tutto $\mathbb{R}$!!!

- 2) Individuare il campo di esistenza della seguente funzione polinomiale:

$$y = -3x^3 + 4x^2 - 1$$

- ☐ $x \neq -3$
☐ $x \neq 1$
☒ $\mathbb{R}$
☐ $x \neq \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$

Poiché la funzione data è polinomiale, essa risulta definita su tutto l'asse reale: una qualunque funzione polinomiale, infatti, è definita su tutto $\mathbb{R}$, indipendentemente dal suo grado!!!

- 3) Individuare il campo di esistenza della seguente funzione razionale fratta:

$$y = \frac{2x-1}{x^2+1}$$

- ☐ $x \neq \frac{1}{2}$
☐ $x \neq -1$
☐ $x \neq +1, x \neq -1$
☒ $-\infty < x < +\infty$

Poiché la funzione data è razionale fratta, essa risulta definita su tutto l'asse reale tranne nei punti ove si annulla il denominatore della frazione; nel caso in esame, quindi, bisogna porre la condizione $x^2 + 1 \neq 0$, che è sempre verificata essendo $x^2 + 1$ la somma di due quadrati, ovvero una quantità sempre positiva; del resto, risolvendo l'equazione associata, cioè $x^2 + 1 = 0$, si può subito constatare che essa presenta $\Delta < 0$, per cui $x^2 + 1 = 0$ non è mai soddisfatta.

4) Individuare il campo di esistenza della seguente funzione razionale fratta:

$$y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4}$$

- ☐ $\mathbb{R}$
- ☐ $x \neq 2$
- ☐ $x \neq -2$
- ☒ $x \neq +2, x \neq -2$

Poiché la funzione data è razionale fratta, essa risulta definita su tutto l'asse reale tranne nei punti ove si annulla il denominatore della frazione; nel caso in esame, quindi, bisogna porre la condizione $x^2 - 4 \neq 0$; inoltre l'equazione associata, $x^2 - 4 = 0$, ha come soluzioni $x = +2, x = -2$; ne segue che $x^2 - 4 \neq 0$ ha come soluzioni $x \neq +2, x \neq -2$.

5) Individuare il campo di esistenza della seguente funzione razionale fratta:

$$y = \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^2 - 3}$$

- ☐ $\mathbb{R}$
- ☐ $x \neq +\sqrt{3}$
- ☒ $x \neq \pm\sqrt{3}$
- ☐ $x \neq -\sqrt{3}$

Poiché la funzione data è razionale fratta, essa risulta definita su tutto l'asse reale tranne nei punti ove si annulla il denominatore della frazione; nel caso in esame, quindi, bisogna porre la condizione $x^2 - 3 \neq 0$; inoltre l'equazione associata, $x^2 - 3 = 0$, ha come soluzioni $x = +\sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$; ne segue che $x^2 - 3 \neq 0$ ha come soluzioni $x \neq +\sqrt{3}, x \neq -\sqrt{3}$.

6) Individuare l'equazione dell'asintoto verticale della seguente funzione:

$$y = \frac{x-1}{2x+2}$$

- ☒ $x = -1$
- ☐ $x = \frac{1}{2}$
- ☐ $x = 1$
- ☐ $x = 2$

L'asintoto verticale di una funzione razionale fratta si ottiene dal campo di esistenza della funzione, precisamente uguagliando a zero il denominatore; ne segue:

$$2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{2} \Rightarrow x = -1$$

7) Individuare l'equazione dell'asintoto orizzontale della seguente funzione:

$$y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4}$$

- ☐ $y = \frac{1}{2}$
- ☒ $y = -1$
- ☐ $y = 1$
- ☐ $y = 2$

L'asintoto orizzontale di una funzione razionale fratta si ottiene risolvendo il limite della funzione data per x che tende a $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4} \right)$$

Poiché nel caso in questione il numeratore ed il denominatore della frazione presentano lo stesso grado, ovvero sono entrambi polinomi di grado 2, per calcolare il limite è sufficiente fare il rapporto dei coefficienti della x che figura al grado più alto; precisamente risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\cancel{-x^2} + 2x + 3}{\cancel{x^2} - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-1}{1} \right) = -1$$

8) Individuare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 4}$$

- ☐ $-\infty$
☐ $+\infty$
☒ 0
☐ -2

Infatti risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2 + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

osservando che un qualunque numero diviso infinito dà come risultato zero.

Si poteva pervenire allo stesso risultato osservando che nella frazione il grado del numeratore è zero (il numeratore è costituito solo da un numero, per cui ha grado zero), motivo per cui risulta inferiore al grado del denominatore che è, invece, due: ogni volta che ci si trova in una situazione di questo tipo il limite è sempre zero.

9) Individuare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x - 1}{2x + 5}$$

- ☒ $-\infty$
☐ $\frac{3}{2}$
☐ $\frac{1}{2}$
☐ $+\infty$

Infatti risulta:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 + x - 1}{2x + 5} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3\cancel{x^2} + x - 1}{2\cancel{x} + 5} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x}{2} \right) = \frac{3(-\infty)}{2} = -\infty$$

osservando che infinito diviso per un qualunque numero dà come risultato infinito.

Si poteva pervenire allo stesso risultato osservando che nella frazione il grado del numeratore, pari a due, risulta superiore al grado del denominatore che è, invece, uno: ogni volta che ci si trova in una situazione di questo tipo il limite è sempre infinito.

10) Individuare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{9 - 4x^2}$$

- ☐ $+\infty$
☐ $\frac{1}{9}$
☐ 0
☒ $-\frac{1}{4}$

Infatti risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{9 - 4x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cancel{x^2}}{-4\cancel{x^2}} \right) = -\frac{1}{4}$$

osservando che nella frazione il grado del numeratore, ovvero due, coincide con quello del denominatore, per cui per il calcolo del limite assegnato è sufficiente fare il rapporto dei coefficienti della x che figura al grado più alto.

11) Individuare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^3 + 1}{2 - 5x^2 + 3x^4}$$

- ☐ $-\frac{25}{30}$
☒ $-\frac{23}{30}$
☐ 0
☐ $+\infty$

Infatti, sostituendo alla x il valore -2 , ovvero il valore ove essa tende, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^3 + 1}{2 - 5x^2 + 3x^4} = \lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{3(-2)^3 + 1}{2 - 5(-2)^2 + 3(-2)^4} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{3(-8) + 1}{2 - 5(+4) + 3(+16)} \right] = -\frac{23}{30}$$

osservando che un numero negativo risulta sempre tale se è elevato ad una potenza dispari e sempre positivo se viene, invece, elevato ad una potenza pari.

12) Individuare gli asintoti orizzontali e verticali della seguente funzione:

$$y = \frac{2x - 1}{3x + 2}$$

- ☐ AV.: $x = -\frac{2}{3}$; AO.: $y = -\frac{1}{2}$
☐ AV.: $x = -2$; AO.: $y = \frac{3}{2}$
☒ AV.: $x = -\frac{2}{3}$; AO.: $y = \frac{2}{3}$
☐ AV.: $x = -\frac{1}{3}$; AO.: $y = \frac{2}{3}$

Per la ricerca degli asintoti verticali basta porre il denominatore della frazione uguale a zero, ovvero:

$$3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \Rightarrow \text{AV.: } x = -\frac{2}{3}$$

Per la ricerca degli asintoti orizzontali, invece, basta calcolare il limite della funzione per x che tende a $\pm\infty$; poiché la funzione data ha numeratore e denominatore di egual grado, pari ad uno, tale limite è uguale al rapporto dei coefficienti della x che figura al grado più alto; risulta, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}} \right) = \frac{2}{3} \Rightarrow A.O.: y = \frac{2}{3}$$

13) Individuare gli asintoti orizzontali e verticali della seguente funzione:

$$y = \frac{6x^2 + x - 1}{7x + 2 + 6x^2}$$

☐ AV.: $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{2}$; A.O.: $y = \frac{6}{7}$

☐ AV.: $x = -\frac{2}{3}$, $x = 2$; A.O.: $y = 1$

☐ AV.: $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$; A.O.: $y = \frac{1}{6}$

☒ AV.: $x = -\frac{2}{3}$, $x = -\frac{1}{2}$; A.O.: $y = 1$

Per la ricerca degli asintoti verticali basta porre il denominatore della frazione uguale a zero, ovvero:

$$7x + 2 + 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 + 7x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{-7 \pm 1}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-7-1}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}; x_2 = \frac{-7+1}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \Rightarrow AV.: x = -\frac{2}{3}; x = -\frac{1}{2}$$

Per la ricerca degli asintoti orizzontali, invece, basta calcolare il limite della funzione per x che tende a $\pm\infty$; poiché la funzione data ha numeratore e denominatore di egual grado, pari a due, tale limite è uguale al rapporto dei coefficienti della x che figura al grado più alto; risulta, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{6x^2 + x - 1}{7x + 2 + 6x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{6\cancel{x^2}}{6\cancel{x^2}} \right) = 1 \Rightarrow A.O.: y = 1$$

14) Individuare gli asintoti verticali della seguente funzione polinomiale:

$$y = 2x^2 + 3x - 5$$

☒ non esistono asintoti verticali

☐ AV.: $x = -5$

☐ AV.: $y = 2$, $y = 5$

☐ AV.: $x = 2$

Le funzioni polinomiali, in quanto definite su tutta la retta reale, non presentano mai asintoti verticali!!!

15) Individuare la derivata della seguente funzione:

$$y = 3x^{10} - 5x^{12} + 3x^{-4} + 5x^{\left(\frac{1}{2}\right)} - x + 1$$

☐ $y' = 30x^9 - 60x^{11} + 3x^4 + 10x^2 - x$

☐ $y' = 30x^9 - 60x^{11} - 12x^{-3} + \frac{5}{2}x^{\left(\frac{1}{2}\right)}$

☒ $y' = 30x^9 - 60x^{11} - 12x^{-5} + \frac{5}{2}x^{\left(-\frac{1}{2}\right)} - 1$

☐ $y' = 30x^9 - 12x^{11} + 12x^{-5} + 10\sqrt{x} - 1$

Si tratta di una funzione polinomiale, motivo per cui bisogna sfruttare le classiche regole di derivazione che caratterizzano tali tipi di funzioni, precisamente:

a) la derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate dei singoli addendi che la costituiscono, cioè:

$$D[f(x) + g(x) + h(x) + \dots] = D[f(x)] + D[g(x)] + D[h(x)] + \dots$$

b) la derivata di una potenza è data dalla seguente relazione:

$$D(a_0 x^n) = a_0 D(x^n) = a_0 n x^{n-1}$$

tenendo bene a mente le seguenti due condizioni:

- $D(x) = 1$
- $D(a) = 0$, ovvero la derivata di una costante (cioè di un qualsiasi numero reale) è sempre nulla

Ne segue, quindi:

$$\begin{aligned} y' &= D(3x^{10}) + D(-5x^{12}) + D(3x^{-4}) + D\left(5x^{\frac{1}{2}}\right) + D(-x) + D(1) = \\ &= 3 \cdot 10 \cdot x^{10-1} + (-5) \cdot 12 \cdot x^{12-1} + 3 \cdot (-4) \cdot x^{-4-1} + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot x^{\frac{1}{2}-1} + (-1) \cdot 1 + 0 = \\ &= 30x^9 - 60x^{11} - 12x^{-5} + \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1 \end{aligned}$$

16) Individuare la derivata della seguente funzione:

$$y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3}$$

☐ $y' = \frac{(2x+3)(x^3) + (x^2+3x+1)(3x^2)}{(x^3)^2}$

☐ $y' = \frac{(x^2+3x+1)(3x^2) - (2x+3)(x^3)}{x^3}$

☐ $y' = \frac{(2x+3)(x^3) - (x^2+3x+1)(3x^2)}{x^2}$

☒ $y' = \frac{(2x+3)(x^3) - (x^2+3x+1)(3x^2)}{(x^3)^2}$

Si tratta di una funzione razionale fratta, per cui per calcolare la sua derivata bisogna sfruttare la seguente regola:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{D[f(x)] \cdot g(x) - f(x) D[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

essendo $f(x)$ il polinomio che figura al numeratore della funzione e $g(x)$ il polinomio che figura al suo denominatore.

Applicando la regola sopra riportata, risulta:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3} \Rightarrow y' = \frac{D(x^2 + 3x + 1) \cdot x^3 - (x^2 + 3x + 1) \cdot D(x^3)}{(x^3)^2} = \\ &= \frac{(2x + 3) \cdot x^3 - (x^2 + 3x + 1) \cdot (3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{2x^4 + 3x^3 - 3x^4 - 9x^3 - 3x^2}{(x^3)^2} = \\ &= \frac{-x^4 - 6x^3 - 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{\cancel{x^2}(-x^2 - 6x - 3)}{\cancel{x^6}^3} = \frac{-x^2 - 6x - 3}{x^3} \end{aligned}$$

17) Individuare la derivata della seguente funzione:

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 3x + 1}$$

☐ $y' = \frac{(x^2 + 3x + 1)^2 (x^3) - (2x + 3)(x^3)}{(x^2 + 3x + 1)^2}$

☐ $y' = \frac{(x^2 + 3x + 1)(3x^2) - (2x + 3)(x^3)}{2x + 3}$

☒ $y' = \frac{(x^2 + 3x + 1)(3x^2) - (2x + 3)(x^3)}{(x^2 + 3x + 1)^2}$

☐ $y' = \frac{(2x + 3)(x^3) - (x^2 + 3x + 1)(3x^2)}{(x^2 + 3x + 1)^2}$

Si tratta di una funzione razionale fratta, per cui per calcolare la sua derivata bisogna sfruttare la seguente regola:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{D[f(x)] \cdot g(x) - f(x) D[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

essendo $f(x)$ il polinomio che figura al numeratore della funzione e $g(x)$ il polinomio che figura al suo denominatore.

Applicando la regola sopra riportata, risulta:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{x^3}{x^2 + 3x + 1} \Rightarrow y' = \frac{D(x^3) \cdot (x^2 + 3x + 1) - (x^3) \cdot D(x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + 3x + 1)^2} = \\
 &= \frac{(3x^2) \cdot (x^2 + 3x + 1) - x^3 \cdot (2x + 3)}{(x^2 + 3x + 1)^2} = \frac{3x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 2x^4 - 3x^3}{(x^2 + 3x + 1)^2} = \\
 &= \frac{x^4 + 6x^3 + 3x^2}{(x^2 + 3x + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 6x + 3)}{(x^2 + 3x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

18) Individuare i punti di intersezione con gli assi cartesiani della seguente funzione:

$$y = 2x + 3$$

☐ $P_1 = \left(0, -\frac{3}{2}\right), P_2 = (3, 0)$

☒ $P_1 = (0, 3), P_2 = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

☐ non ci sono intersezioni della funzione con gli assi cartesiani

☐ $P_1 = P_2 = (0, 0)$

Per individuare i punti di intersezione della funzione con gli assi cartesiani, occorre risolvere i seguenti due sistemi:

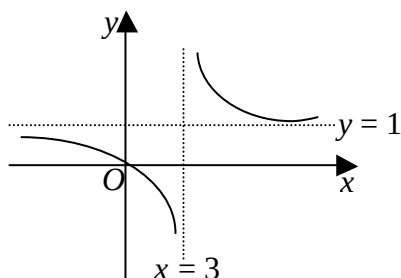
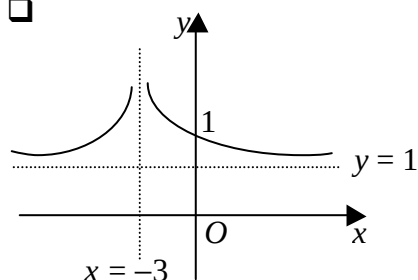
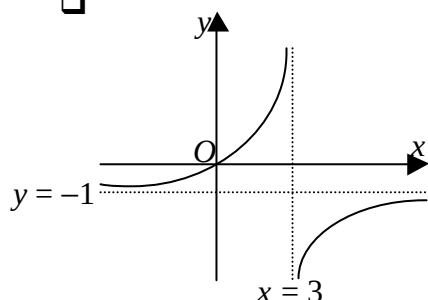
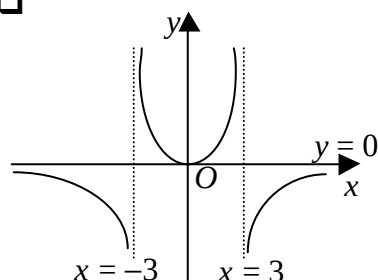
$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1 = (0, 3)$$

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2x + 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P_2 = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$$

cioè P_1 è il punto di intersezione della funzione (che nel caso specifico è una retta) con la retta di equazione $x = 0$, ovvero con l'asse delle y , mentre P_2 è il punto di intersezione della funzione con la retta di equazione $y = 0$, ovvero con l'asse delle x .

19) Individuare quali tra i seguenti è il grafico approssimativo della funzione:

$$y = \frac{x}{x-3}$$

☒

☐

☐

☐


Per la risoluzione di questo esercizio, senza perdere troppo tempo, bisogna lasciarsi trasportare un po' dall'intuito. Osserviamo, infatti, che si tratta di una funzione razionale fratta: se poniamo uguale a zero il denominatore otteniamo l'asintoto verticale, cioè $x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow AV.: x=3$; inoltre, numeratore e denominatore hanno lo stesso grado, motivo per cui facendo il rapporto dei coefficienti della x al grado più alto si ottiene l'asintoto orizzontale, cioè $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = 1 \Rightarrow A.O.: y=1$. Procedendo per esclusione il grafico richiesto non può che essere il primo!!!

20) Individuare il punto di massimo della funzione:

$$y = -3x^2 + 2x + 1$$

☐ $M = \left(\frac{1}{2}, -4 \right)$

☐ $M = \left(-\frac{1}{3}, 1 \right)$

☐ $M = (4, 3)$

☒ $M = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$

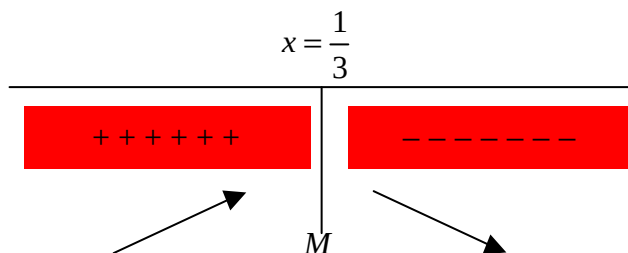
Per trovare il punto di massimo occorre calcolare, in primo luogo, la derivata prima della funzione:

$$y = -3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow y' = -6x + 2$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow -6x + 2 > 0 \Rightarrow -6x > -2 \Rightarrow 6x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{6} \Rightarrow x < \frac{1}{3}$$

cioè:



da cui segue:

$$y' > 0 \text{ per } x < \frac{1}{3}$$

Dunque, per $x = \frac{1}{3}$ si ottiene un massimo. Per individuare il punto di massimo occorre calcolare l'ordinata corrispondente a tale valore dell'ascissa sostituendo il valore della x appena determinato nella funzione data. Si ha:

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{3} \Rightarrow y &= -3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = -3\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{2}{3} + 1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 = \\ &= \frac{-1+2+3}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow M = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

21) Individuare i punti di massimo o di minimo della funzione:

$$y = 3x - 1$$

☐ $M = (3, -1)$

☐ la funzione non ha né massimi né minimi perché è sempre crescente

☐ $M = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$

☐ la funzione non ha né massimi né minimi perché è sempre decrescente

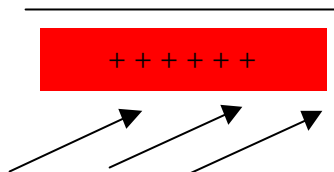
Per trovare il punto di massimo occorre calcolare, in primo luogo, la derivata prima della funzione:

$$y = 3x - 1 \Rightarrow y' = 3$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow 3 > 0 \Rightarrow \text{sempre (infatti 3 è un numero, per cui risulta essere sempre positivo!!!)}$$

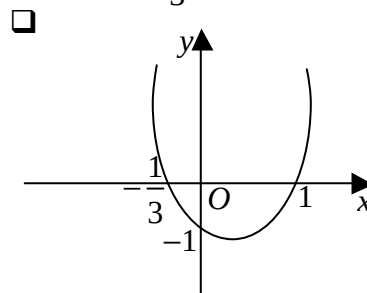
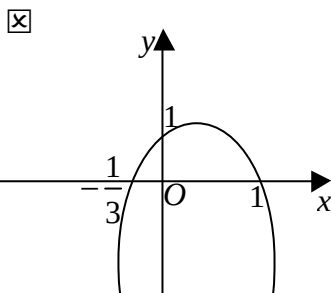
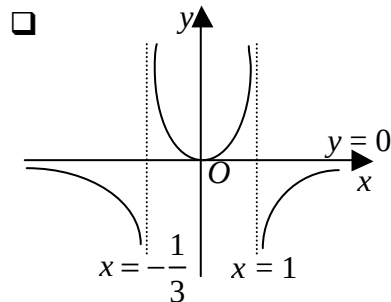
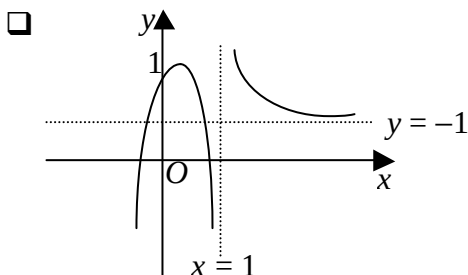
cioè:



da cui segue che la derivata prima della funzione assegnata è sempre positiva, ovvero la funzione stessa è sempre crescente. Dunque non ci sono né massimi né minimi per la funzione.

22) Individuare quali tra i seguenti è il grafico approssimativo della funzione:

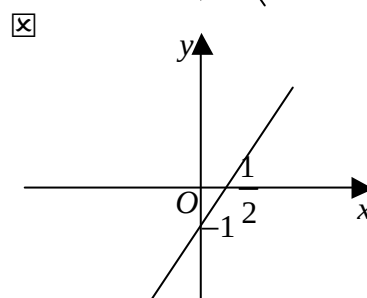
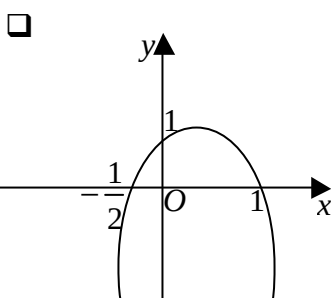
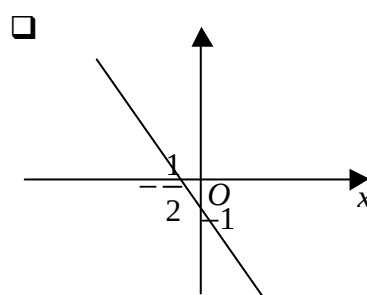
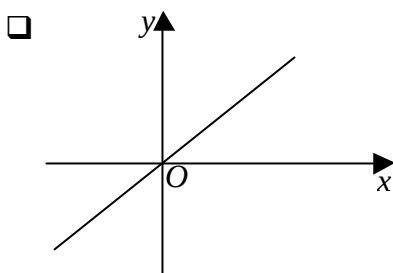
$$y = -3x^2 + 2x + 1$$



Anche in questo caso bisogna lasciarsi trasportare un po' dall'intuito. Osserviamo, infatti, che si tratta di una funzione polinomiale di secondo grado, ovvero di una parabola; inoltre, il coefficiente del termine x^2 è negativo per cui la parabola avrà la concavità rivolta verso il basso; infine, nel precedente esercizio abbiamo calcolato già il punto di massimo della funzione!!! Dunque il grafico richiesto è esattamente il terzo (sono da escludere tutti quei grafici che presentano degli asintoti, sia orizzontali che verticali, trattandosi di una funzione polinomiale).

23) Individuare quali tra i seguenti è il grafico approssimativo della funzione:

$$y = 2x - 1$$



In questo caso la funzione assegnata non è altro che una retta, motivo per cui sarà sufficiente calcolare le sue intersezioni con gli assi cartesiani, ricordando che per due punti passa una ed una sola retta. Determinanti, quindi, tali punti possiamo condurre per essi un'unica retta che sarà proprio quella richiesta. Risulta, allora:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1 = (0, -1)$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2x - 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

cioè P_1 è il punto di intersezione della retta con l'asse delle y , mentre P_2 è il punto di intersezione della retta l'asse delle x .

24) Individuare i punti di intersezione con gli assi cartesiani della seguente funzione:

$$y = \frac{6x^2 + x - 1}{7x + 2 + 6x^2}$$

☒ $P_1 = \left(0, -\frac{1}{2}\right), P_2 = \left(\frac{1}{3}, 0\right), P_3 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

☐ $P_1 = \left(0, -\frac{1}{2}\right), P_2 = (-3, 0), P_3 = (2, 0)$

☐ $P_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right), P_2 = (-3, 0), P_3 = (0, 3)$

☐ non ci sono intersezioni della funzione con gli assi cartesiani

Per individuare i punti di intersezione della funzione con gli assi cartesiani, occorre risolvere i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} y = \frac{6x^2 + x - 1}{7x + 2 + 6x^2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{0 + 0 - 1}{0 + 2 + 0} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1 = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} y = \frac{6x^2 + x - 1}{7x + 2 + 6x^2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{6x^2 + x - 1}{7x + 2 + 6x^2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{6x^2 + x - 1}{7x + 2 + 6x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(6)(-1)}}{2(6)} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{12} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 - 5}{12} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{-1 + 5}{12} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-6}{12} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{+4}{12} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{1}{3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right), P_3 = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

osservando che la soluzione del primo sistema è stata ottenuta sostituendo, nella prima equazione dello stesso, alla x il valore 0, cioè il valore della seconda equazione; nel secondo sistema, invece, si è posto il numeratore della prima equazione uguale a zero (una funzione razionale fratta, infatti, si annulla solo quando il suo numeratore è uguale a zero!!!) e, dopo aver svolto i calcoli, si è ottenuta un'equazione di secondo grado risolubile facilmente con la formula risolutiva delle equazioni algebriche di secondo grado. Dunque P_1 è il punto di intersezione della funzione con la retta di equazione $x = 0$, ovvero con l'asse delle y , mentre P_2 e P_3 sono i punti di intersezione della funzione con la retta di equazione $y = 0$, ovvero con l'asse delle x (poiché il numeratore della funzione assegnata è di secondo grado, essa intersecherà l'asse delle x in ben due punti!!!).

25) Individuare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{6x^2 + x - 1}{7x + 2 + 6x^2} \leq 0$$

☐ non ci sono soluzioni

☒ $-\frac{2}{3} < x \leq \frac{1}{3}$

☐ $x < -\frac{2}{3}, x \geq \frac{1}{3}$

☐ $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}$

Per risolvere la disequazione razionale fratta assegnata occorrerà studiare il numeratore ed il denominatore della funzione separatamente per poi rappresentarle su un medesimo grafico. È possibile, per tale fine, procedere in due modi differenti:

- porre numeratore e denominatore entrambi positivi, fare il grafico relativo a ciascuno ed il conseguente prodotto dei segni, considerare solo gli intervalli ove figura il segno meno, secondo quanto richiesto dall'esercizio assegnato;
- fare a priori lo studio del segno: una frazione, infatti, risulta negativa, in base al quoziente dei segni, se il numeratore è positivo ed il denominatore è negativo o viceversa; ci si può porre, ad esempio, nel primo caso.

Si proceda, in primo luogo secondo quanto illustrato in a):

$$\frac{6x^2 + x - 1}{7x + 2 + 6x^2} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} N(x) = 6x^2 + x - 1 \geq 0 \\ D(x) = 7x + 2 + 6x^2 > 0 \end{cases}$$

Occorre ora determinare le soluzioni delle equazioni, di secondo grado, associate alle due disequazioni, dopo aver però osservato che l'uguale è stato inserito solo nella prima disequazione poiché, al solito, il denominatore di una frazione deve essere sempre diversa da zero. Risulta, allora:

$$6x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(6)(-1)}}{2(6)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1-5}{12} \\ x_2 = \frac{-1+5}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{6}{12} \\ x_2 = +\frac{4}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$7x + 2 + 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 + 7x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4(6)(2)}}{2(6)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} =$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{-7 \pm 1}{12} = \frac{-7 \pm 1}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-7-1}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \approx -0,6 \\ x_2 = \frac{-7+1}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \approx -0.5 \end{cases}$$

Poiché, quindi, in entrambe le equazioni risulta $\Delta > 0$, segue:

$$6x^2 + x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2}, x \geq \frac{1}{3}$$

$$7x + 2 + 6x^2 > 0 \Rightarrow x < -\frac{2}{3}, x > -\frac{1}{2}$$

Andando ora a rappresentare i risultati ottenuti su di un medesimo grafico, si ha:

$x = -\frac{2}{3}$		$x = -\frac{1}{2}$		$x = \frac{1}{3}$	
+++++	+++++	-----	+++++	+++++	+++++
+++++	-----	+++++	+++++	+++++	+++++
+	-	-	+	+	+

Una volta effettuato il prodotto dei segni, bisogna andare a vedere quali sono gli intervalli da considerare: nel caso in esame, ad esempio, dovendo stabilire per quali valori della x la disequazione assegnata è soddisfatta, ovvero per quali valori della x la funzione razionale fratta risulta maggiore od uguale a zero, occorre considerare gli intervalli all'interno dei quali figura il segno meno dopo il prodotto dei segni, precisamente:

$$\frac{6x^2 + x - 1}{7x + 2 + 6x^2} \leq 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x \leq \frac{1}{3}$$

osservando che il valore $x = -\frac{2}{3}$ deve essere escluso poiché esso annulla il denominatore della nostra funzione (in ogni frazione il denominatore deve essere sempre diverso da zero), mentre il valore $x = \frac{1}{3}$ può essere incluso (anzi deve essere incluso in quanto richiesto dalla nostra disequazione " $\leq$ ") poiché esso annulla solo il denominatore della funzione razionale fratta.

Si proceda ora secondo quanto illustrato in *b)* e si confrontino i risultati ottenuti:

$$\frac{6x^2 + x - 1}{7x + 2 + 6x^2} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} N(x) = 6x^2 + x - 1 \geq 0 \\ D(x) = 7x + 2 + 6x^2 < 0 \end{cases}$$

in quanto una frazione è negativa, in base al quoziente dei segni, quando è negativo o il numeratore o il denominatore e non entrambi. Ci si è posti, ad esempio, nel caso in cui il numeratore è positivo ed il denominatore è negativo (+ diviso - è sempre -, così come - diviso + è sempre -).

Tralasciamo la determinazione delle soluzioni delle equazioni associate alle due disequazione in quanto già trovate precedentemente e limitiamoci esclusivamente alla risoluzione delle due disequazione.

Risulta, allora:

$$6x^2 + x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2}, x \geq \frac{1}{3}$$

$$7x + 2 + 6x^2 < 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{2}$$

Andando ora a rappresentare i risultati ottenuti su di un medesimo grafico, si ha:

$x = -\frac{2}{3}$		$x = -\frac{1}{2}$		$x = \frac{1}{3}$	
+++++		+++++		-----	
-----		+++++		-----	
-		+		+	

In tal caso, bisogna andare a considerare solo gli intervalli dove compare il segno positivo, avendo effettuato la distinzione all'inizio della discussione. Com'è allora facile constatare si ottengono le medesime soluzioni, ovvero:

$$\frac{6x^2 + x - 1}{7x + 2 + 6x^2} \leq 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x \leq \frac{1}{3}$$

26) Individuare le soluzioni della seguente equazione di II grado:

$$2x^2 + 5x - 1 = 0$$

☒ $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}, x_2 = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}$

☐ $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}$

☐ $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{2}, x_2 = \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}$

☐ nessuna soluzione reale

Trattandosi di un'equazione di secondo grado, per determinare le sue soluzioni, sarà sufficiente applicare la ben nota formula di seguito riportata:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 8}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$$

27) Individuare le soluzioni della seguente disequazione di II grado:

$$2x^2 + 5x - 1 \geq 0$$

☐ nessun valore di x

☐ ogni valore di x

☒ $x_1 \leq \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}, x_2 \geq \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}$

☐ $\frac{-5 - \sqrt{33}}{4} \leq x \leq \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}$

Si consideri, in primo luogo, l'equazione associata alla disequazione assegnata:

$$2x^2 + 5x - 1 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono state trovate nell'esercizio precedente, cioè:

$$2x^2 + 5x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}, x_2 = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}$$

Ne segue che la nostra disequazione, essendo $\Delta > 0$, è soddisfatta per valori esterni alle due radici, estremi inclusi (è richiesto, infatti, il maggiore ed uguale). Precisamente, si ha:

$$2x^2 + 5x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}, x \geq \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}$$

28) Individuare le soluzioni della seguente disequazione di II grado:

$$4x^2 - 20x + 25 > 0$$

☐ sempre

☒ per ogni valore di x meno che per $x = \frac{5}{2}$

☐ $x \neq \frac{2}{5}$

☐ mai

Si consideri, in primo luogo, l'equazione associata alla disequazione assegnata:

$$4x^2 - 20x + 25 > 0 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0$$

le cui soluzioni sono date da:

$$4x^2 - 20x + 25 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{400 - 4(4)(25)}}{2(4)} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

Ne segue che la nostra disequazione, essendo $\Delta = 0$, è soddisfatta sempre tranne che per quel valore che annulla l'equazione (in tale valore, infatti, si ottiene l'uguale a zero e non la stretta maggiorazione richiesta dall'esercizio). Precisamente, si ha:

$$4x^2 - 20x + 25 > 0 \Rightarrow \text{sempre} - \left\{ x = \frac{5}{2} \right\}$$

cioè sempre meno che per $x = \frac{5}{2}$.

29) Individuare le soluzioni della seguente disequazione di II grado:

$$-x^2 + 3x - 3 < 0$$

☒ sempre

☐ per ogni valore di x meno che nel punto $x = 3$

☐ $x = 1$

☐ mai

Si consideri, come di consueto, l'equazione associata alla disequazione assegnata:

$$-x^2 + 3x - 3 < 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 3 > 0$$

cambiando il segno ed il verso della disequazione stessa.

Le soluzioni dell'equazione sono date da:

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Ne segue che la disequazione $x^2 - 3x + 3 > 0$, e di conseguenza quella di partenza $-x^2 + 3x - 3 < 0$, essendo $\Delta < 0$, è soddisfatta sempre, per qualunque valore di x sull'asse reale.

30) Individuare le soluzioni della seguente disequazione di II grado:

$$x^2 - 3x + 3 < 0$$

- ☐ per ogni valore di x meno che nel punto $x = 3$
- ☐ $x = 1$
- ☒ mai
- ☐ sempre

Tale esercizio è stato svolto, se pure indirettamente, nell'ambito dell'esercizio precedente; poiché, infatti, è stato trovato $\Delta < 0$ nell'equazione associata, ne segue che la disequazione con il maggiore di zero è sempre soddisfatta e, di conseguenza, la disequazione con il minore di zero non è mai soddisfatta.